کوانٹم تدابیر اور ارتقائی استحکام

اظہر اقبال (Azhar Iqbal) اور ڈیرک ایبٹ (Derek Abbott)
سکول آف الیکٹریکل اینڈ الیکٹرانک انجینئرنگ
یونیورسٹی آف ایڈیلیڈ
جنوبی آسٹریلیا 5000
آسٹریلیا
School of Electrical and Electronic Engineering
University of Adelaide
South Australia 5000
Australia

ملخّص

یہ مضمون ریاضیات کی ایک مروّجہ شاخ گیم تھیوری کی کوانٹم میکانیات کے دائرۂ اختیار میں توسیع کا اردو میں تعارف ہے۔ ہم کوانٹم نظریۂ تدبیر اور ارتقائی استحکام کے تصوّرات کو بیان کرتے ہیں اور اس تحقیقی میدان کے کچھ ایسے سوالات پر نگاہ دوڑاتے ہیں جوکہ اب تک جوابات کے متلاشی ہیں۔

Abstract:
This article in Urdu presents an introduction to the extension of an established branch of mathematics called game theory towards the quantum domain. We describe concepts of quantum games and evolutionary stability and go through some of the unanswered questions in this research area.

I. انتساب

یہ مضمون پاکستان کے ان طلبہ و طالبات کے نام وقف ہے جو ذہنی تجسّس اور علمی جذبے کے ساتھ ساتھ اردو سے شغف بھی رکھتے ہیں۔

II. تعارف

گیم تھیوری (game theory) ریاضی کی ایک اہم اور مروّجہ شاخ ہے جو کہ جون وان نیومین (John von Neumann) اورآسکر مورگنسٹرن (Oskar Mogenstern) سے منسوب ہے۔ گیم تھیوری عقلی فیصلہ سازوں (rational decision makers) کے درمیان تدبیری تعامل (strategic interaction) کے ریاضیاتی ماڈل کا مطالعہ ہے اور اس کی اطلاقات معاشیات، سیاسیات، ریاضیاتی بائیالوجی، تجارت، انجینئرنگ، منطق (logic) اور کمپیوٹر سائنس کے ساتھ ساتھ کئی اور شعبوں میں بھی ہیں۔

شطرنج، جنگ اور سیاست جیسی کھیلیں انسانی تاریخ کے ہر دور میں کھیلی گئی ہیں۔ جب بھی ایسے افراد ملتے ہیں جو متضاد خواہشات اور ترجیحات رکھتے ہوں تو ان کے درمیان کھیل کھیلے جانے کے امکان ہوتے ہیں۔ مختلف کھیلوں کے تفصیلی تجزیے اور تفہیمات ایک طویل عرصے سے موجود ہیں لیکن موجودہ دور میں کھیلوں کے تجزیے کا ایک ریاضیاتی نظریے اور ایک رسمی مطالعہ کے طور پر سامنے آنا نسبتاً ایک حالیہ واقعہ ہے۔ کھیل کا نظریہ اصل میں اس عقلی رویے کا تجزیہ ہے جب کھیل کے شرکاء کے اعمال ایک دوسرے پر منحصر ہوں اور کھیل کے ایک شریکِ کار کی حکمت عملی اس پر منحصر ہو کہ اس کے مخالفین اسی کھیل میں کیا تدابیر اختیار کرتے ہیں [1--3]۔

کھیلوں کی عام طور پر دو واضح عمومی اشکال ہوتی ہیں۔ ایک طرح کے کھیل وہ ہیں جن میں شریک ایجنٹوں (agents) یا کھلاڑیوں کی افادیات (utilities) صرف امکانات (probabilities) پر منحصر ہوتی ہیں جبکہ دوسری طرح کے وہ کھیل ہیں جن میں شریک ایجنٹوں کی افادیات کا ان کے تدبیری اعمال (strategic actions) پر انحصار ہوتا ہیں۔ مثال کے طور پر جوا خانے (casino) میں کھیلا جانے والا رولیٹ (roulette) ایک امکانی کھیل ہے جبکہ شطرنج ایک تدبیری کھیل ہے۔

گیم تھیوری کی ابتدائی تاریخ ایسی کھیلوں کی تحقیق سے متعلق ہے جن میں تدبیر دانوں (strategic players) کی افادیّات کا مجموعہ صفر ہوتا ہے۔ یہ ایسے کھیل ہیں جن میں ایک کھلاڑی کی افادیت میں حصول کھیل میں شریک دوسرے کھلاڑیوں کے مجموعی نقصانات کے برابر ہوتا ہے اور ان کو صفر- جمع (zero-sum) قسم کے کھیل کہا جاتا ہے۔ تاہم ایک نہ- صفر- جمع (non-zero-sum) کھیل میں ایک کھلاڑی کی افادیت میں حصول دوسرے کھلاڑیوں کے مجموعی نقصانات سے مختلف ہوتی ہے۔

موجودہ دور میں گیم تھیوری کو وسیع پیمانے پر مختلف رویّوں کے باہمی تعلقات کی منطقانہ تشریح حاصل کرنے کیلئے لاگو کی جاتا ہے۔ یہاں تک کہ اب انسانوں، جانوروں اور کمپیوٹروں میں استدلالی فیصلے کرنے کی سمجھ بوجھ کے حصول میں مدد کرنے والی سائنس کے طور پر اسے ایک وسیع معنوں والی اصطلاح کے طور پر بھی جانا جاتا ہے۔

سوال یہ ہے کہ اردو میں گیم تھیوری کا صحیح ترجمہ کیا نظریہ کھیل ہو یا کہ نظریۂ تدبیر؟ گیم تھیوری کے استعمال سے جوا خانے میں کھیلے جانے والی رولیٹ (roulette) میں جیتنے کے امکانات کا تعیّن تو کیا جا سکتا ہے لیکن گیم تھیوری کے زیادہ تر معاملات کا مقصد کھیل میں شریک تدبیر دانوں کی مختلف حکمت عملیوں (strategies) میں سے صحیح حکمت عملی کا تعیّن کرنا ہوتا ہے۔ اس نقطۂ نظر سے شاید یہ درست دکھائی دیتا ہے کہ اردو میں گیم تھیوری کا ترجمہ نظریۂ تدبیر ہونا چاہیے نہ کہ نظریۂ کھیل۔ تاہم اس مضمون کے کچھ قارئین کو اس سے اختلاف ہو سکتا ہے۔

III. پس منظر

کچھ عرصہ قبل ایک دوست نے یونیورسٹی آف ایڈیلیڈ میں منعقد ایک چھوٹی سی محفل میں یہ کہا کہ تخلیق کا کام اس زبان میں ہی بہترین ہو سکتا ہے جس میں آپ کا دماغ سوچتا ہے اور باالخصوص وہ زبان جس میں آپ کو خواب آتے ہیں۔ گفتگو کے پس منظر کو سامنے رکھتے ہوئے وہ یہ کہنا چاہ رہے تھے کہ ایک ایسا تخلیقی عمل، جس کی نوعیت سائینسی ہو یا پھر غیر سائینسی، اور جس کا بنیادی اظہار انگریزی زبان میں ہو، اس میں غیر انگریزی پسء منظر کے لوگوں کیلئے ایسی شراکت یا حصہ داری کرنا جس کی حیثیت کو عمومی طور پر قابلء یقین اور ٹھوس سمجھا جا سکے، نہ صرف بہت مشکل ہے بلکہ اس شراکت کی حدود کے خدوخال ان لوگوں کے غیر انگریزی پس منظر سے متعیّن ہوتے ہیں۔

انہوں نے معروف فلسفی لڈوگ وٹگنسٹائین (Ludwig Wittgenstein) کی اس بات کی طرف حوالہ دیا کہ انسانی ذہن کے بلند سوچ اور خاص طور پر اس کے گہرے اور پیچیدہ تصوّرات تک رسائی کی صلاحیت اس انسان کے لفظوں، جملوں، اور زبان کے استعمال میں مہارت سے متعیّن ہوتی ہے اور ظاہر ہے یہ مہارت اسکی مادری زبان میں ہی اپنے بلند ترین درجے تک پہنچ سکتی ہے۔

یہ بہتر طور پر جاننے کیلئے کہ یہ نقطۂ نظر کیا ہے میں نے ارادہ کیا کہ کیوں نہ اردو زبان میں ایک مضمون لکھا جائے جو میری اس تحقیق کے کچھ حصوں کا اردو میں تعارف ہو جو کئی سال پہلے میں نے قائدِاعظم یونیورسٹی اسلام آباد میں بطور ایک تحقیقی طالب علم کی تھی۔ میرے سامنے سوال یہ تھا کہ اس نوعیت کی سائینسی تحقیق جو میں کرتا رہا ہوں کے اردو میں اظہار سے کونسے بڑے چیلنجوں کا سامنا ہوتا ہے۔ اور خاص کر یہ کہ کیا ایسا کرنے سے وہ فوائد سامنے آتے ہیں جن کے بارے میں وٹگنسٹائین نے ذکر کیا ہے۔

ایک اور وجہ یہ تھی کہ کئی سالوں سے مجھے یونیورسٹی آف ایڈیلیڈ میں ہر سال بین الاقوامی مقابلوں میں پی ایچ ڈی سکالرشپس (PhD scholarships) جیتنے والے قابل ایرانی طالب علم نظر آتے رہے اور پاکستان سے آنے

والے بہت کم نظر آئے۔ کئی ایرانی طالب علموں کے ڈیسکوں پر اعلی معیار کی سائینسی اور ٹیکنیکل مضامین پر لکھی ہوئی فارسی میں کتابیں بھی دکھائی دیں جو انھوں نے اپنے یونیورسٹی کے دنوں میں ایران میں پڑھی تھیں۔ آبادی میں پاکستان ایران سے بڑا ملک ہے لیکن ایسے مضامین پر اس معیار کی اردو میں لکھی گئی کتابیں مجھے یاد نہیں کہ لاہور اور راولپنڈی کے اردو بازاروں میں نظر آئی ہوں۔ پاکستان جانا سالوں بعد ہوتا ہے اور شاید اس سلسلے میں وہاں صورت حال اب مختلف ہو۔ میری اردو لکھنے میں زیادہ مہارت نہیں ہے لیکن بطور ایک پاکستانی اس زبان سے وابستگی اور شغف قدرتی عمل ہے۔ اس کے ساتھ ساتھ اس مضمون کا مواد کچھ پاکستانی طلبا و طالبات کیلئے باعثِ دلچسپی ہو سکتا ہے۔

IV. نیش کا توازن

نظریۂ تدبیر میں ایک اہم ترین نتیجہ 1951 میں جون نیش (John Nash) نے ثابت کیا [4] جس کی رو سے ایجینٹوں کے ایک ایسے گروہ، جس کے ارکان ایک تدبیری تعامل (strategic interaction) میں شریک ہوں، کیلئے ایک یا اس سے زیادہ ایسے امکانی توازنات (probabilistic equilibria) ہر صورت میں متعیّن کیے جا سکتے ہیں اس طرح کہ ہر ایک امکانی توازن کی نوعیت یہ ہو کہ گروہ میں شریک کسی ایک ایجنٹ کیلئے اس امکانی توازن سے یکطرفہ انحراف (unilateral deviation) کا کوئی جواز اور محرک (motivation) موجود نہ رہے۔

اگر دو کھلاڑیوں کے درمیان کھیل اس طرح کا ہو کہ کھلاڑی A کے پاس m مختلف خالص تدابیر (pure strategies) ہوں جبکہ کھلاڑی B کے پاس n مختلف خالص تدابیر ہوں تو اس صورت میں اس کھیل میں شامل ہر کھلاڑی کا افادیّتی میٹرکس (utility matrix) کا آرڈر $m \times n$ ہوتا ہے اور اسے اس طرح لکھا جا سکتا ہے [3--1]:

$$\text{Player } A \quad \begin{array}{c} \\ S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_m \end{array} \overset{\text{Player } B}{\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} S_1' & S_2' & \cdots & S_n' \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}} . \qquad (1)$$

اس میٹرکس میں موجود مقداریں یہ ظاہر کرتی ہیں کہ کھیل میں شریک کھلاڑی A کی افادیّت کھیل کے اختتام پر کیا

ہو گی۔ ہر کھلاڑی کی افادیّت دونوں کھلاڑیوں کے مجموعی اعمال پر منحصر ہوتی ہے۔ اوپر دیے گئے افادیّتی میٹرکس میں کھلاڑی A کی خالص تدابیر بائیں طرف والے کالم سے ظاہر ہوتی ہیں جبکہ کھلاڑی B کی خالص تدابیر اوپر والی قطار سے ظاہر ہوتی ہیں۔ اس طرح کا ایک اور میٹریکس کھلاڑی B کیلئے بھی لکھا جا سکتا ہے۔

اس کھیل کی بار بار کھیلی گئی شکل (repeated version of game) میں ہم مرکب تدابیر (mixed strategies) کے تصوّر کو بیان کر سکتے ہیں جو کہ خالص تدابیر کے اوپر ہونے والی ایک امکانی تقسیم (probability distribution) سے حاصل ہوتا ہے۔ مرکب تدبیروں کا تصوّر یہ بیان کرتا ہے کہ کھیل کی بار بار کھیلی گئی شکل میں کس خاص خالص تدبیر کو کس امکان سے کھیلا گیا ہے۔

نیش کے توازن (Nash equilibrium) کو متعارف کرنے کیلئے ہمیں تدبیری خاکے (strategy profile) کے تصوّر کی ضرورت ہے۔ ایک تدبیری خاکہ کھیل میں شریک تمام کھلاڑیوں کی تدابیر پر مشتمل ایک ایسے سیٹ (set) کا نام ہے جو کہ کھیل میں کھیلی گئی تدابیر اور اعمال کو مکمل طور پر بیان کرتا ہے۔ ایک تدبیری خاکے میں ہر ایک کھلاڑی کی طرف سے کھیلی گئی صرف ایک تدبیر شامل ہونی چاہیے اور یہ ایک مرکب تدبیر بھی ہو سکتی ہے۔

مثال کے طور پر ایک ایسا کھیل جس میں شریک تین کھلاڑی ہوں اور اس کا تدبیری خاکہ (s_A^*, s_B^*, s_C^*) ہو، اس میں s_A^*, s_B^* اور s_C^* تینوں کھلاڑیوں A, B اور C کی بالترتیب تدابیر ہوں تو اس تدبیری خاکے کے ساتھ اس کھیل میں کھلاڑی A کی افادیت کو عمومی طور پر $P_A(s_A^*, s_B^*, s_C^*)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اگر ایک تدبیری خاکہ $(s_A^*, s_B^* \cdots s_G^*)$ ایسے کھیل کیلئے ہو جس میں $A, B \ldots G$ کھلاڑی شریک ہوں اور اگر یہ تدبیری خاکہ درج ذیل شرائط کو پورا کرے تو اسے ایک نیش کا توازن کہا جاتا ہے:

$$\left.\begin{array}{c} P_A(s_A, s_B^* \cdots s_G^*) \leq P_A(s_A^*, s_B^* \cdots s_G^*) \\ P_B(s_A^*, s_B \cdots s_G^*) \leq P_B(s_A^*, s_B^* \cdots s_G^*) \\ \cdots \\ P_G(s_A^*, s_B^* \cdots s_G) \leq P_G(s_A^*, s_B^* \cdots s_G^*) \end{array}\right\}, \qquad (2)$$

جب کہ یہ عدم مساواتیں (inequalities) ان تمام تدابیر $s_A \in S_A$، $s_B \in S_B$ اور $s_G \in S_G$ کیلئے درست ہوں، جو کہ مرکب بھی ہو سکتی ہیں جہاں اور S_A، S_B اور S_G وغیرہ کھلاڑیوں کے تدبیری سیٹ ہیں۔

اوپر دی گئی عدم مساواتوں سے دیکھا جا سکتا ہے کہ کوئی کھلاڑی اگر نیش کے توازن سے متعلق تدبیری خاکے (strategy profile)، جو کہ $(s_A^*, s_B^* \cdots s_G^*)$ ہے، سے یک طرفہ طور پر انحراف کرے تو اس کی افادیت میں اضافہ تو نہیں لیکن کمی ضرور ہو سکتی ہے۔ یعنی کھیل میں شریک تمام کھلاڑیوں کو یہ محرّک دیا گیا ہے کہ وہ نیش

کے توازن کے تدبیری خاکے کے ساتھ جڑے رہیں اور یک طرفہ طور پر اس سے انحرّاف سے گریز کریں۔

V. قیدیوں کا دو عارطہ

تدبیری کھیلوں کی ایک اہم مثال قیدیوں کا دو عارطہ (Prisoner's Dilemma) ہے جس کی تفصیل کچھ یوں ہے [2, 3]۔ پولیس کے گشت کے دوران دو جرائم پیشہ افراد گلیوں میں منشیات فروخت کرتے ہوئے پکڑے جاتے ہیں۔ قانون میں منشیات کی اس طرح فروخت کی سزا چھ ماہ قید ہے۔ پولیس دونوں ملزموں کو مزید تفتیش کیلئے تھانے لے جاتی ہے۔

تفتیش کے دوران ملزموں کے ریکارڈ کی چھان بین کرنے پر پولیس کو معلوم ہوتا ہے کہ دونوں ملزمان شاید ماضی میں ایک بینک لوٹنے کی وادات میں بھی ملوّث ہیں۔ لیکن پولیس کے پاس ان کے خلاف کوئی ایسے ٹھوس ثبوت موجود نہیں ہیں کہ جن کو استعمال کرتے ہوئے عدالت میں جا کر انہیں مجرم ثابت کیا جا سکے۔ تاہم پولیس کو کافی حد تک یقین ہے کہ یہی وہ اصحاب ہیں جنھوں نے ماضی میں بینک لوٹنے کی واردات کی تھی۔ کافی غور و فکر کے بعد پولیس ایک حکمتِ عملی متعیّن کرتی ہے جس کی تفصیل اس طرح سے ہے :

1۔ دونوں ملزمان، جن کے نام فرقان (F) اور نزیر (N) ہیں، کو علیحدہ علیحدہ کمروں میں مزید تفتیش کیلئے رکھا جائے۔

2۔ اپنے ساتھی کے خلاف گواہی دینے کو تدبیر (D) کہا جائے جبکہ اس کے خلاف گواہی سے انکار کرنے کو تدبیر (C) کہا جائے۔

3۔ اگر نزیر اور فرقان دونوں اپنے علیحدہ علیحدہ کمروں سے ایک دوسرے کے خلاف بینک لوٹنے کے بارے میں گواہی دینے سے انکار کر دیں یعنی ان کا تدبیری سیٹ (C, C) ہو، جہاں بریکٹ میں پہلا اندراج نزیر کیلئے ہے جبکہ دوسرا فرقان کیلئے، تو دونوں کو چھ چھ ماہ قید میں گزارنے ہونگے جو کہ گلیوں میں منشیات بیچنے کی سزا ہے : افادیات : نزیر: 3 ، فرقان : 3

4۔ فرقان کو علیحدگی میں یہ بتایا جائے کہ اگر وہ نزیر کے خلاف بینک لوٹنے کے بارے میں گواہی دے (D)، جبکہ اسی دوران نزیر اپنے علیحدہ کمرے میں بینک لوٹنے کے بارے میں جاری ایسی ہی تفتیش پر فرقان کے خلاف گواہی نہ دے (C)، تو فرقان کو نا صرف رہا کر دیا جائے گا بلکہ فرقان کو مبلغ ایک لاکھ روپے انعام میں بھی دیے جائیں گے کہ اس نے پولیس کو ایک بدنام بینک کے ڈاکو (جس کا نام نزیر ہے) کو پکڑنے میں پولیس کی مدد کی۔ کیونکہ دورانِ تفتیش نزیر نے فرقان کے خلاف گواہی نہیں دی اس لئے نزیر انصاف کی راہ میں رکاوٹ ثابت ہوا

ہے۔ اس لئے نزیر کو بینک لوٹنے پر پانچ سال سزا ہو گی : افادیات : نزیر: 0 ، فرقان: 5

5۔ اسی طرح نزیر کو علیحدگی میں یہ بتایا جائے کہ اگر وہ فرقان کے خلاف بینک لوٹنے کے بارے میں گواہی دے (D) ، جبکہ اسی دوران فرقان اپنے علیحدہ کمرے میں بینک لوٹنے کے بارے میں جاری ایسی ہی تفتیش پر نزیر کے خلاف گواہی نہ دے (C) ، تو نزیر کو نا صرف رہا کر دیا جائے گا بلکہ نزیر کو مبلغ ایک لاکھ روپے انعام میں بھی دیے جائیں گے کہ اس نے پولیس کو ایک بدنام بینک کے ڈاکو (جس کا نام فرقان ہے) کو پکڑنے میں پولیس کی مدد کی۔ کیونکہ دورانِ تفتیش فرقان نے نزیر کے خلاف گواہی نہیں دی اس لئے فرقان انصاف کی راہ میں رکاوٹ ثابت ہوا ہے۔ اس لئے فرقان کو بینک لوٹنے پر پانچ سال سزا ہو گی۔ : افادیات : نزیر: 5 ، فرقان: 0

6۔ اگر نزیر اور فرقان دونوں اپنے علیحدہ علیحدہ کمروں سے ایک دوسرے کے خلاف بینک لوٹنے کے بارے میں گواہی دیں (D, D) ، تو دونوں کو دو دو سال قید میں گزارنے ہونگے۔ : افادیات : نزیر: 1 ، فرقان: 1

قیدیوں کے دو عارظہ کے اس تدبیری کھیل کو درج ذیل افادیاتی میٹریکس سے ظاہر کر سکتے ہیں :

$$\begin{array}{cc} & \text{F} \\ & \begin{array}{cc} C & D \end{array} \\ \text{N} \begin{array}{c} C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} (3,3) & (0,5) \\ (5,0) & (1,1) \end{pmatrix}. \end{array} \tag{3}$$

اس کھیل کی عمومی شکل اسطرح ہے کہ :

$$\begin{array}{cc} & \text{F} \\ & \begin{array}{cc} C & D \end{array} \\ \text{N} \begin{array}{c} C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} (r,r) & (s,t) \\ (t,s) & (u,u) \end{pmatrix}, \end{array} \tag{4}$$

جبکہ درج ذیل مطلوبات

$$s < u < r < t, \tag{5}$$

درست ہوں۔

دونوں ملزمان خالص تدابیر کھیلتے ہیں تو فرقان کی تدبیر یا تو نزیر کے خلاف گواہی ہو سکتی ہے یا پھر گواہی سے انکار۔ اسی طرح نزیر کی تدبیر یا تو فرقان کے خلاف گواہی ہو سکتی ہے یا پھر گواہی سے انکار۔ اور اس طرح افادیتی میٹریکس

(3) کے مطابق کھلاڑیوں کی افادیات ، جو کہ دونوں کی تدابیر پر منحصر ہیں، کیلئے نیش کی عدم مساواتوں (2) کو تدبیری جوڑے $(D\ ,\ D)$ کیلئے اس طرح لکھا جا سکتا ہے :

$$P_N(D, D) - P_N(C, D) \leq 0,$$
$$P_F(D, D) - P_F(D, C) \leq 0, \tag{6}$$

جس میں دی گئی ایک بریکٹ میں پہلا اندراج کھلاڑی A کی تدبیر ہے جبکہ دوسرا اندراج کھلاڑی B کی تدبیر ہے۔ میٹریکس (4) کو استعمال کرتے ہوئے ان عدم مساواتوں سے ہمیں

$$(u - s) \leq 0, \tag{7}$$

حاصل ہوتا ہے جو کہ مطلوبات (5) کی روشنی میں درست ہے۔

عدم مساواتوں (6) کے مطابق دونوں کھلاڑیوں کیلئے بہتر یہی ہے کہ وہ ایک دوسرے کے خلاف گواہی دیں اور اس طرح $(D\ ,\ D)$ کا تدبیری جوڑا ایک نیش کے توازن کے طور پر سامنے آتا ہے۔

قیدیوں کے دو عارظہ میں دلچسپ امر یہ ہے کہ باوجود اس کے کہ دونوں قیدی خاموشی کی تدابیر $(C\ ,\ C)$ اختیار کر کے صرف چھ چھ ماہ قید میں گزار کر آزاد ہو سکتے ہیں، دونوں استدلالی طور پر یہی بہتر تدبیر سمجھتے ہیں کہ ایک دوسرے کے خلاف گواہی دی جائے اور نتیجہ کے طور پر دونوں دو دو سال قید میں گزاریں۔

VI. نظریۂ تدبیر اور سیاست

نظریۂ تدبیر کی اہم اطلاقات میں معاشیات اور سیاسیات شامل ہیں۔ دنیا کے چند معتبر ترین تدبیر دانوں میں اسرائیل کے پروفیسر رابرٹ آومن (Robert Aumann) کا نام شامل ہے جنہیں تھامس شیلنگ (Thomas Schelling) کے ساتھ سال 2005 میں اکنامک سائینسز (economic sciences) میں نوبل میموریل پرائیز (Nobel Memorial Prize in Economic Sciences) سے نوازا گیا۔

پروفیسر آومن اسرائیل میں دائیں بازو کے سیاسی گروپ ، جس کا نام "مضبوط اسرائیل کیلئے پروفیسرز" (Professors for a Strong Israel) ہے، کے رکن ہیں۔ 2005 میں پروفیسر آومن نے اسرائیل کی غزہ میں عدم مداخلتی تحریک کی مخالفت کی اور یہ دعوی کیا کہ ایسا کرنا گش کٹیف (Gush Katif) کے آباد کاروں کے خلاف ایک جرم اور اسرائیل کی سلامتی کے لئے سنگین خطرہ ہے۔

پروفیسر آومن نظریۂ تدبیر میں بلیک میلر کا متناقضہ (Blackmailer Paradox) کی طرف حوالہ دیتے ہوئے کہتے ہیں کہ اسرائیل کی طرف سے عربوں کو زمین دینا تدبیری طور پر ایک بےوقوفانہ عمل ہے جس کی توجیح ریاضیاتی نظریۂ تدبیر کے لٹریچر میں بلیک میلر کے متناقضہ کی تفصیل میں موجود ہے [5]۔

ان کے خیال میں عرب ریاستیں ایک ڈھٹائی والا مطالبہ کر کے اسرائیل کو اس بات پر مجبور کرتی ہیں کہ وہ ان کے بلیک میل میں آ جائے۔ اور اس عمل کی وجہ عرب ریاستوں کا یہ تاثر ہے کہ اگر اسرائیل غیر لچکدارانہ رویہ رکھتا ہے تو اسے گفت وشنید کے کمرے سے خالی ہاتھ جانا ہو گا۔

VII. تدبیر کا کوانٹم نظریہ

کوانٹم گیم تھیوری (quantum game theory) یا تدبیر کا کوانٹم نظریہ، تحقیق کا وہ میدان ہے جس میں کھیلوں کے مروّجہ یا کلاسیکی نظریۂ کھیل کو ایسی سمت کی طرف بڑھایا جاتا ہے جو کہ روایتی طور پر کوانٹم کا علاقہ (quantum domain) ہے۔ تحقیق کا یہ شعبہ 1999 میں وجود میں آیا اور اب یہ کوانٹم انفارمیشن اور کمپیوٹیشن (quantum information and computation) کے تحقیقی میدان [6] کا حصہ ہے۔ اس تحقیقی میدان کا بنیادی مقصد کوانٹم کمپیوٹر بنانا ہے جو کہ مستقبل میں کلاسیکی کمپیوٹر (classical computer) کے مقابلے میں انتہائی زیادہ طاقتور ہو گا۔ ریاضی کے خاص مسائل اور کوانٹم نظامات (quantum systems) کی سمولیشن (simulation) کیلئے کوانٹم کمپیوٹر کی غیر معمولی طاقت کو نظریاتی طبیعات اور ریاضیاتی اصولوں کی پرکھ سے ثابت کیا جا چکا ہے۔ دنیا کی کئی اہم تجربہ گاہوں میں کوانٹم کمپیوٹر بنانے کی کوششیں زور و شور سے جاری ہیں اور اسکے پروٹوٹائپس (prototypes) تیار کئے جا چکے ہیں۔

ا. ڈیوڈ مایئر اور کوانٹم نظریۂ تدبیر کی ابتدا

اگرچہ نظریۂ کوانٹم (quantum theory) میں ایسی صورت حال کی نشاندہی پہلے بھی متعدد بار کی گئی جس کا تجزیہ نظریۂ تدبیر سے ہو سکتا ہے لیکن شاید اس میدان میں کام کرنے والوں کی اکثریت کے مطابق تدبیر کے کوانٹم نظریے کی باقاعدہ ابتدا سال 1999 میں ہوئی جب یونیورسٹی آف کیلیفورنیا سان ڈیاگو (San Diego) کے ریاضی کے پروفیسر ڈیوڈ مایئر (David Meyer) نے طبیعات کے معتبر ترین سمجھے جانے والے جریدے فزیکل ریوّیو لیٹرز (Physical Review Letters) میں ایک پرچہ [7] شائع کیا۔

اس پرچے میں انھوں نے اپنا یہ موقّف بیان کیا کہ کوانٹم انفارمیشن اور کمپیوٹیشن (quantum information and computation) میں ایک اوریکل مسئلہ (oracle problem) کے لئے تجویز کردہ کوانٹم الگورتھم (quantum algorithm) کو ایک ایسے تدبیری عمل کی طرح بھی سمجھا جا سکتا ہے کہ جس میں شریک دو ایجنٹوں کی انفرادی افادیات (individual utilities) کا مجموعہ تو صفر ہو لیکن ایک ایجنٹ کوانٹم تدابیر پر عمل کر سکتا ہو جبکہ کھیل میں شریک دوسرا ایجنٹ کلاسیکی تدابیر پر عمل درآمد کرنے تک محدود ہو۔ اسطرح اگر کوانٹم الگورتھمز اپنی فطرت میں تدبیری کھیل ہیں تو ریاضیاتی نظریۂ تدبیر کو نئے کوانٹم الگورتھموں کی دریافت کیلئے جاری کوششوں میں ایک نئے اوزار کے طور پر استعمال کیا جا سکتا ہے۔

کوانٹم تدبیر کا نظریہ ایسے اسٹریٹجک یا باتدبیر ایجنٹوں کے درمیان تعامل کا مطالعہ کرتا ہے جن کی رسائی کوانٹم انٹینگلمنٹ (quantum entanglement) اور کوانٹم سپرپوزیشن (quantum superposition) کے اہم وسائل تک بھی ہو۔ تدبیر کے کوانٹم نظریہ میں دو یا دو سے زیادہ ایجنٹوں کی طرف سے ایک کوانٹم نظام کو تدبیری طریقوں سے ترکیب کیا جاتا ہے اور اس عمل میں مقامی یونیٹری ٹرانسفارمیشنز (local unitary transformations) اور کوانٹم پیمائش (quantum measurement) کا اطلاق کیا جاتا ہے۔ ایجنٹوں کی انفرادی افادیات ان کے تدبیری اقدامات (حکمت عملی)، جو کہ مقامی یونیٹری ٹرانسفارمیشنز پر مشتمل ہوتی ہے، کے بعد کوانٹم سسٹم پہ کی جانے والی آخری پیمائش کے نتائج سے حاصل کی جاتی ہیں۔

ب۔ آئیزرٹ، ولکنز، اور لیونسٹائین اور دو قیدیوں کے دو عارظہ کی کوانٹم شکل

ڈیوڈ مایئر کے اس اہم نتیجہ کو بنیاد بنا کر اسی سال یعنی 1999 میں ہی آئیزرٹ، ولکنز، اور لیونسٹائین (Eisert, Wilkens, and Lewenstein) نے جرمنی کی پوٹس ڈیم (Potsdam) اور ہین اووّر (Hannover) یونیورسٹیوں سے فزیکل ریوّیو لیٹرز میں ہی ایک پرچہ [8] شائع کیا جس میں انھوں نے دو قیدیوں کے دو عارظہ کے تدبیری کھیل، جس کی تفصیل اوپر بیان کی گئی ہے، کی ایک کوانٹم میکانکی شکل کی تجویز کی۔ ان دو اہم پرچوں کو عموماء کوانٹم نظریۂ تدبیر کی ابتدا سمجھا جاتا ہے۔

آئیزرٹ اور انکے ساتھیوں نے یہ دریافت کیا کہ اگر قیدیوں کے دو عارظہ کو اس طرح کھیلا جائے کہ دونوں کھلاڑی کی رسائی کوانٹم دنیا کے اہم وسیلے یعنی کوانٹم انٹینگلمنٹ (quantum entanglement) تک بھی ہو، اور کھلاڑیوں کی تدابیر ان کی مقامی یونیٹری ٹرانسفارمیشنز (local unitary transformations) پر مشتمل ہوں تو اس تدبیری کھیل کا ایک نہایت دلچسپ نتیجہ برآمد ہوتا ہے۔ وہ یہ کہ ایک ایسا نیا نیش کا توازن اس کھیل کے حل کے طور

پر سامنے آتا ہے جس میں دونوں کھلاڑیوں (قیدیوں) کی انفرادی افادیات (3 ، 3) ہوتی ہیں جو کہ کھیل کی کلاسیکی شکل میں ناممکن ہے چاہے کھلاڑی مرکب تدبیریں کھیلنے کے بھی مجاز ہوں۔ لیکن اس تدبیری کھیل میں نیش کا یہ نیا توازن دو خالص یا امکانی کلاسیکل تدابیر (pure or mixed classical strategies) پر نہیں بلکہ دو خاص قسم کے مقامی یونیٹری ٹرانسفارمیشنز پر مشتمل ہوتا ہے۔

آئیزرٹ اور ساتھیوں کی دو کھلاڑیوں کے درمیان کھیلے گئے کوانٹم کھیل کے تعمیری عمل میں ایک کیوبٹ (qubit) کی ھلبرٹ سپیس (Hilbert space) میں کیفیت کو دو اساسی ویکٹرز (basis vectors) سے تفویض کیا جاتا ہے جو کہ $|S_1\rangle$ اور $|S_2\rangle$ ہوتے ہیں۔ دو کیوبٹس (qubits) کی مخصوص مجموئی کیفیات (states) کو دو ایسی ھلبرٹ سپیسس (Hilbert spaces) $\mathcal{H}_A$ اور $\mathcal{H}_B$ میں ظاہر کیا جا سکتا ہے جس میں ہر ایک کی ڈائیمینشن (dimension) دو عدد ہو۔

اس طرح کھیل کی کیفیت کو ایک ایسے ویکٹر سے بیان کیا جا سکتا ہے جو کہ ٹینسر پروڈکٹ سپیس (tensor-product space) $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ میں ہو اور اس کا احاطہ اساسی ویکٹرز $|S_2S_1\rangle$, $|S_1S_2\rangle$, $|S_1S_1\rangle$ اور $|S_2S_2\rangle$ کریں۔ کھیل کی ابتدائی کیفیت $|\psi_{ini}\rangle = \hat{J}\,|S_1S_1\rangle$ ہوتی ہے جبکہ $\hat{J}$ ایک ایسا یونیٹری آپریٹر ہے جس کا علم دونوں کھلاڑیوں کو ہے۔ آئیزرٹ اور ساتھیوں نے یونیٹری آپریٹر $\hat{J}$ جو کہ کھیل میں انٹینگلمنٹ کی ایک متعیّن مقدار γ کو پیدا کرتا ہے کی تعریف یوں کی کہ :

$$\hat{J} = \exp\left\{i\gamma S_2 \otimes S_2/2\right\}. \tag{8}$$

فرض کریں کہ فرقان (F) اور نزیر (N) کی تدابیر بالترتیب یونیٹری آپریشنز $\hat{U}_F$ اور $\hat{U}_N$ ہیں جن کو ایک تدبیری سپیس (strategic space) سے چنا گیا ہے جسے ہم S سے ظاہر کرتے ہیں۔ کھلاڑیوں کے تدبیری عوامل کے بعد کھیل کی کیفیت $\hat{U}_F \otimes \hat{U}_N \hat{J}\,|S_1S_1\rangle$ میں تبدیل ہو جاتی ہے۔

کھیل کا آخری مرحلہ ایک کوانٹم پیمائش کے عمل پر مشتمل ہوتا ہے جس میں کھیل کی تبدیل شدہ کیفیت پر پہلے ایک معکوس یونیٹری آپریٹر (reverse unitary operator) کا اطلاق کیا جاتا ہے جسے $\hat{J}^\dagger$ سے ظاہر کرتے ہیں، اور پھر اسے سٹرن گیرلاخ (Stern-Gerlach) کی قسم کے پیمائشی آلات کے ایک جوڑے (pair) سے گزارا جاتا ہے۔ انکشاف یا ڈیٹیکشن (detection) سے پہلے کھیل کی آخری کیفیت (final state) کو $|\psi_{fin}\rangle = \hat{J}^\dagger \hat{U}_F \otimes \hat{U}_N \hat{J}\,|S_1S_1\rangle$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

دونوں کھلاڑیوں کی متوقّع ادائیگیوں (expected utilities) کو کھیل کی آخری کیفیت $|\psi_{fin}\rangle$ کو ٹینسر پروڈکٹ سپیس (tensor-product space)، جو کہ $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ ہے ، کے اساسی ویکٹرز کے اوپر پروجیکشنز

(projections) کرنے سے اس طرح حاصل کیا جاتا ہے کہ ان پروجیکشنز کے اوزان (weights) وہ مستقل مقداریں ہوں جو کہ کھیل کے میٹریکس (matrix) میں موجود ہیں۔ مثال کے طور پر ادائیگی میٹریکس (4) کو استعمال کرتے ہوئے نزیر (N) کی متوقّع ادائیگی (payoff) کو اسطرح لکھا جاتا ہے :

$$P_N = r\left|\langle S_1S_1 \mid \psi_{fin}\rangle\right|^2 + s\left|\langle S_1S_2 \mid \psi_{fin}\rangle\right|^2 + t\left|\langle S_2S_1 \mid \psi_{fin}\rangle\right|^2 + u\left|\langle S_2S_2 \mid \psi_{fin}\rangle\right|^2, \quad (9)$$

اور یوں فرقان (F) کی متوقّع ادائیگی کو ہم اس ٹرانفارمیشن (transformation) سے حاصل کر سکتے ہیں : $s \rightleftarrows t$ ، یعنی کہ :

$$P_F = s\left|\langle S_1S_1 \mid \psi_{fin}\rangle\right|^2 + t\left|\langle S_1S_2 \mid \psi_{fin}\rangle\right|^2 + s\left|\langle S_2S_1 \mid \psi_{fin}\rangle\right|^2 + u\left|\langle S_2S_2 \mid \psi_{fin}\rangle\right|^2. \quad (10)$$

آئیزرٹ اور ساتھیوں نے دو کھلاڑیوں کے درمیان کھیل کی اپنی اصلی تجویز کردہ کوانٹم شکل میں دونوں کھلاڑیوں کی تدابیر کو درج ذیل یونیٹری آپریٹرز کے سیٹ تک محدود کیا :

$$U(\theta,\phi) = \begin{pmatrix} e^{i\phi}\cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) & e^{-i\phi}\cos(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad (11)$$

جس میں $\theta \in [0,\pi]$ اور $\phi \in [0,\pi/2]$ ہو۔ اس طرح اگر $\gamma \in [0,\pi/2]$ ہو ، جو کہ کھیل میں موجود انٹینگلمنٹ کی مقدار کو ظاہر کرتا ہے۔

اب اگر یونیٹری آپریٹرز کا یہ جوڑا

$$(\hat{U}_A^*, \hat{U}_B^*), \quad (12)$$

ایک نیش کا توازن ہو تو اس صورت میں

$$\begin{aligned} \Pi_A(\hat{U}_A^*, \hat{U}_B^*) - \Pi_A(\hat{U}_A, \hat{U}_B^*) \geq 0, \\ \Pi_B(\hat{U}_A^*, \hat{U}_B^*) - \Pi_B(\hat{U}_A^*, \hat{U}_B) \geq 0, \end{aligned} \quad (13)$$

ہو گا یعنی کہ دونوں کھلاڑیوں میں سے ہر ایک کیلیئے تدبیری جوڑے (12) سے یکطرفہ انحرّاف کرنے سے کوئی فائدہ تو نہیں لیکن نقصان ضرور ہو سکتا۔

آئیزرٹ اور ساتھیوں نے کھلاڑیوں کی تدابیر کو جس یونیٹری آپریٹرز کے سیٹ (11) تک محدود کیا اس کی توجیہہ پر بعد میں دوسرے تحقیق دانوں نے سوالات اٹھائے لیکن اس کی تفصیل پر گفتگو اس مضمون کی دسترس (scope) سے باہر ہے۔

دلچسپ بات یہ ہے کہ جب انٹینگلمنٹ کی پیمائش $\gamma = 0$ ہو تو کوانٹم کھیل وہ کلاسیکل شکل اختیار کر لیتا ہے جس میں دونوں کھلاڑی مرکب تدبیریں کھیلنے کے مجاز ہوں۔ آئیزرٹ اور ساتھیوں نے یہ معلوم کیا کہ کھیل میں سب سے زیادہ انٹینگلمنٹ یعنی $\gamma = \pi/2$ کی صورت میں ایک یکتا (unique) پیریٹو آپٹیمل (Pareto optimal) توازن ایک یونیٹری آپریٹرز کے جوڑے $\hat{Q} \otimes \hat{Q}$ پر مشتمل ہوتا ہے اس طرح کہ $\hat{Q} \sim \hat{U}(0, \pi/2)$ ہو۔ پیریٹو آپٹیمل حل کسی کھیل کا ایسا نتیجہ ہوتا جسے کم از کم کسی ایک شریک کھلاڑی کی افادیت کو گھٹائے بغیر کم نہیں کیا جا سکتا [2]۔

یعنی قیدیوں کے دو عارظہ کے تدبیری کھیل کو اگر کوانٹم دنیا کے اہم وسیلے یعنی کوانٹم انٹینگلمنٹ کو استعمال کر کے کھیلا جائے تو دونوں کھلاڑی (قیدی) ایک دوسرے کے خلاف گواہی دینے کے استدلالی نتیجے سے نہ صرف باہر نکل سکتے ہیں بلکہ ایک ایسا پیریٹو آپٹیمل (Pareto-optimal) نتیجہ :

$$(\hat{Q}, \hat{Q}), \tag{14}$$

بھی حاصل کر سکتے ہیں کہ جس میں دونوں کھلاڑیوں (قیدیوں) کو صرف چھ چھ ماہ قید میں گزارنے ہونگے۔ یہ سزا ان کے گلیوں میں منشیات بیچنے کیلئے ہے اور اسکی گواہ خود پولیس ہے۔ یعنی

$$P_N(\hat{Q}, \hat{Q}) = 3 = P_F(\hat{Q}, \hat{Q}). \tag{15}$$

اس تدبیری کھیل کی کلاسیکی شکل میں، جس میں دونوں کھلاڑیوں کی رسائی مرکب تدبیروں تک بھی ہو، ایسا نتیجہ بطور ایک نیش کے توازن کے حاصل کرنا ناممکن ہے۔

اب تک کے دریافت شدہ کوانٹم الگورتھموں [6] کی فہرست زیادہ طویل نہیں اور یہ وہ مسائل ہیں جن کو حل کرنے کے دوران کوانٹم کمپیوٹر کی کلاسیکی کمپیوٹر پر واضح سبقت ثابت کی جا سکتی ہے۔ تدبیر کے کوانٹم نظریہ کو نئے کوانٹم الگورتھموں کو دریافت کرنے کیلئے جاری موجودہ کوششوں میں پہلے سے دستیاب اور زیر استعمال ریاضیاتی آلات میں تدبیر کے کلاسیکی نظریہ کی اضافت (addition) کے طور پر بھی دیکھا جا سکتا ہے۔

یہ اس وجہ سے اہمیت کا حامل ہے کہ تدبیر کے کلاسیکی نظریہ میں ایجنٹوں کے درمیان پیچیدہ باہمی معاملات کے حل کیلئے طاقتور اور گہرے ریاضیاتی تصورات موجود ہیں اور جیسا کہ ڈیوڈ مائیر نے دکھایا کہ کوانٹم الگورتھموں کو کلاسیکی اور کوانٹم باتدبیر ایجنٹوں کے درمیان پیچیدہ باہمی عوامل کے طور پر بھی سمجھا جا سکتا ہے [9]۔

VIII. ارتقائی طور پر مستحکم تدابیر

سال 1993 میں برطانیہ کی شیفیلڈ یونیورسٹی (University of Sheffield) میں طالب علمی کے دوران میری ملاقات وہاں کے ریاضی کے ڈیپارٹمنٹ میں اس وقت کے ایک پوسٹ ڈاکٹرل فیلو ڈاکٹر مارک بروم (Dr Mark Broom) سے ہوئی تھی۔ ان کی پی ایچ ڈی آکسفورڈ یونیورسٹی سے تھی اور وہ جون مینارڈ سمتھ (John Maynard Smith) کے ارتقائی عوامل پر ریاضیاتی تصورات کے استعمال پر تحقیق کر رہے تھے۔ ان کی تحقیق کا موضوع ارتقائی عوامل کے ریاضیاتی تصوّرات کو استعمال کرتے ہوئے پرندوں کے گھونسلے بنانے کے خاص رویّوں کی تشریح کرنا تھا [10] ۔ یہ موضوع مجھے بہت حیرت انگیز لگا کہ کیسے ایک ریاضیاتی تصوّر کو ایسے مقصد کیلئے بھی استعمال کیا جا سکتا ہے۔ مارک بروم آج کل لندن کی سٹی یونیورسٹی (City University) میں ارتقائی ریاضیات کے پروفیسر ہیں ۔

1970 کی دھائی میں کلاسیکی نظریۂ تدبیر کو بڑی کامیابی کے ساتھ جانوروں کی دنیا میں ہونے والے ارتقائی عوامل کی سمجھ بوجھ حاصل کرنے کیلئے استعمال کیا گیا۔ اس سلسلے میں جون مینارڈ سمتھ ، جن کا تعلق برطانیہ کی سسکس یونیورسٹی (University of Sussex) سے رہا، کا نام پوری دنیا میں جانا جاتا ہے۔ خاص کر ارتقائی بائیالوجی میں ارتقائی طور پر مستحکم تدابیر (Evolutionarily Stable Strategies) (ای ایس ایس) کے ریاضیاتی تصور کو مشہور اور مروّج کرنے میں جون مینارڈ سمتھ کا نام مرکزی حیثیت رکھتا ہے [11] ۔

ایک ارتقائی طور پر مستحکم تدبیر ایک ایسی تدبیر ہے جسے کسی ماحول میں موجود ایجینٹوں یا کھلاڑیوں کی ایک آبادی کی طرف سے کھیلنے کیلئے اگر ایجینٹوں کی طرف سے اگر منظور کر لیا جائے تو اس پر کوئی اور متبادل اور متغیر تدبیر حملہ آور نہیں ہو سکتی جو کہ اسی آبادی میں موجود ایک ایسے چھوٹے گروپ کی طرف سے کھیلی جائے جس کا اس آبادی میں تناسب بہت کم ہو۔

اسطرح ایک آبادی جو کہ ایک ارتقائی طور پر مستحکم تدبیر کھیل رہی ہو وہ ایک چھوٹے گروہ کی طرف سے کھیلی جانے والی ایک مختلف اور متغیر تدبیر کی کامیابی سے مزاحمت کر سکتی ہے۔ ارتقائی طور پر مستحکم تدبیر کے تصور کی جڑیں نظریۂ تدبیر اور جنس کے تناسب (sex ratio) کے موضوع پر پہلے سے کی گئی تحقیق سے جا ملتی ہیں اور اس سلسلے میں معروف ریاضی دان رونالڈ فشر (Ronald Fisher) کا نام بالخصوص جانا جاتا ہے جو جدید شماریات (statistics) کے بانی بھی سمجھے جاتے ہیں [12] ۔ قاری کیلئے شاید یہ باعثء دلچسپی ہو کہ رونالڈ فشر سال 1957 اور 1962 کے دوران یونیورسٹی آف ایڈیلیڈ سے وابستہ رہے اور ان کی باقیات ایڈیلیڈ شہر میں واقع سینٹ پیٹرز کیتھڈرل (St. Peter's Cathedral) کے اندر ایک بینچ کے پاس مدفون ہیں۔

مینارڈ سمتھ نے ایک ایسی بڑی آبادی کا ریاضیاتی مطالعہ کیا جس کے ارکان یا کھلاڑی بے ترتیبانہ طور پر لیکن جوڑوں کی شکل میں اسطرح ملائے جاتے ہیں کہ ہر ملاپ پر دونوں ارکان کے درمیان ایک تدبیری کھیل کھیلا جاتا ہے جسے ایک دوہرے میٹریکس (bimatrix) سے ظاہر کر سکتے ہیں ۔

کھلاڑی گمنام (anonymous) ہوتے ہیں اور اسطرح کھلاڑیوں کے کسی جوڑے کے درمیان کھیلے گئے تدبیری کھیل کو ایک تشاکلی دوہرے میٹریکس (symmetric bi-matrix) سے ظاہر کر سکتے ہیں ۔ کھلاڑی اپنی تدابیر اور ادائیگیوں کے حوالے سے ایک دوسرے سے مماثل ہوتے ہیں۔

دوہرے میٹریکس کے تشاکلی ہونے کا مطلب ہے کہ فرض کیا کہ دونوں کھلاڑیوں کا تدبیری سیٹ S ہے۔ کھلاڑی A کی تدبیر $S_1 \in S$ ہے جبکہ کھلاڑی B کی تدبیر $S_2 \in S$ ہے۔ تو کھلاڑی A کی ادائیگی اس ادائیگی کے برابر ہو گی جو کہ کھلاڑی B کو کی جائیگی جب کھلاڑی A کی تدبیر S_2 ہو اور کھلاڑی B کی تدبیر S_1 ہو۔

نظریۂ تدبیر میں ایک تشاکلی دوہرے میٹریکس کو $G = (M, M^T)$ سے ظاہر کرتے ہیں جس میں M کھلاڑی A کی ادائیگی کا میٹریکس ہے جبکہ M^T ، جو کہ اس کا ٹرانسپوز (transpose) ہے ، وہ کھلاڑی B کی ادائیگی کا میٹریکس ہے۔ کھلاڑیوں کے جوڑوں کے ایک تشاکلی مقابلے (symmetric pair-wise contest) میں اگر ایک x کھلاڑی کی ادائیگی ، جبکہ اس کا مقابل y کھلاڑی ہو ، کو $P(x, y)$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

ایسے تشاکلی مقابلے (symmetric contest) میں دو کھلاڑیوں کے مابین تدابیر کے تبادلے سے دونوں کھلاڑیوں کی ادائیگیوں میں تبادلہ ہوجاتا ہے۔ اسطرح سے ایک کھلاڑی کی ادائیگی اس کی تدبیر سے متعین ہوتی ہے نہ کہ اس کی شناخت سے اور کھلاڑیوں کی ادائیگیوں کو ظاہر کرنے کیلئے اندراجِ ذیلی (subscript) کی ضرورت نہیں رہتی۔

ایک تدبیر x کو ایک ارتقائی طور پر مستحکم تدبیر کہا جائے گا اگر ہر دوسری تدبیر y ، جبکہ $x \neq y$ ہو ، کیلئے درج ذیل عدم مساوات :

$$P[x, (1-\epsilon)x + \epsilon y] > P[y, (1-\epsilon)x + \epsilon y], \tag{16}$$

ہر حسب ضرورت حد تک چھوٹے $\epsilon > 0$ کیلئے درست ہو۔ اس عدم مساوات کے بائیں طرف تدبیر x کی وہ ادائیگی ہے جب اس تدبیر کو ایک دوسری تدبیر $(1-\epsilon)x + \epsilon y$ کے مقابل کھیلا جائے اور $\epsilon \in [0, \epsilon_0)$ ہو۔ اس صورت میں جب $\epsilon_0 > \epsilon$ ہو تو یہ کہا جاتا ہے کہ ایک متغیر تدبیر (mutant strategy) حملہ آور ہے۔ مقدار ϵ_0 کو حملہ آور یا چڑھائی کرنے والی تدبیر کے خلاف رکاوٹ (invasion barrier) کہا جاتا ہے۔

اس تصوّر کو ایسے بھی بیان کر سکتے ہیں کہ ایک تدبیر x ارتقائی طور پر مستحکم ہوتی ہے اگر ہر y متغیر تدبیر (mutant strategy) کی طرف سے ہونے والی چڑھائی کیخلاف ایک مثبت رکاوٹ موجود ہو۔

حملہ آور متغیّر تدبیر کی چڑھائی کے خلاف اس حالت تک مثبت رکاوٹ موجود رہتی ہے کہ آبادی میں متغیر تدبیر y کھیلنے والے ارکان کا تناسب چڑھائی کے خلاف اس مثبت رکاوٹ سے کم ہو جائے۔ ایسی صورت میں تدبیر $(1-\epsilon)x + \epsilon y$ کے خلاف تدبیر x کی متوقع ادائیگی تدبیر y کی متوقع ادائیگی سے زیادہ ہوتی ہے۔

ارتقائی طور پر مستحکم تدبیر x کے حصول کیلئے مندرجہ بالا شرائط کو درج ذیل دو مطلوبات [11] کے طور پر لکھا جا سکتا ہے :

$$\begin{aligned} &1.\quad P(x,x) > P(y,x), \\ &2.\ \text{If } P(x,x) = P(y,x) \text{ then } P(x,y) > P(y,y). \end{aligned} \tag{17}$$

اسطرح ارتقائی طور مستحکم تدبیر ایک ایسے نیش کے تشاکل توازن (symmetric Nash equilibrium) کے طور پر سامنے آتی ہے جس میں چھوٹے تغیرات (small mutations) کے خلاف توازن (stability) کی خاصیت ہوتی ہے [13]۔

مطلوبات (17) کی پہلی شرط یہ دکھاتی ہے کہ اگر x ایک ارتقائی طور مستحکم تدبیر ہے تو تدبیری جوڑا (x,x) اس دوہرے میٹریکس والے کھیل $G = (M, M^T)$ کیلئے نیش کا ایک توازن ہو گا۔ تاہم اس کا متضاد درست نہیں ہو گا۔ یعنی اگر تدبیری جوڑا (x,x) نیش کا ایک توازن ہو تو x ایک ارتقائی طور مستحکم تدبیر صرف اس صورت میں ہو گی کہ تدبیر x مطلوبات (17) میں دی گئی دوسری شرط کو بھی پورا کرے۔

ارتقائی طور مستحکم تدابیر یا ای ایس ایس (ESS) کے تصوّر نے ارتقائی نظریۂ تدبیر (evolutionary game theory) کو مروّج کرنے میں سب سے بڑے محرّک کا کام کیا۔ موجودہ دور میں ای ایس ایس کے تصوّر کو ایک آبادی کے متعامل افراد (interacting individuals) کی مابین ارتقائی حرکیات (evolutionary dynamics) کو سمجھنے کیلئے بطور ایک مرکزی ماڈل کے جانا جاتا ہے۔ ای ایس ایس کا تصوّر اس سوال کو اٹھاتا اور اسکا جواب دیتا ہے کہ ایک آبادی کی کون سی ایسی متوازن کیفیات (stable states) نمودار ہونگی جب اس آبادی میں چنّاو کا ایسا طریقۂ کار عمل پیرا ہو جو بہتر تدبیروں کا طرف دار ہو؟ یہاں متوازن کیفیات وہ ہیں جو تغیّرات (mutations) کی وجہ سے ہونے والے انتشار (perturbations) کے خلاف مزاحمتی اہلیت رکھتی ہیں۔

ای ایس ایس کے نظریہ کا متحرّک چارلس ڈارون (Charles Darwin) کا قدرتی چنّاو (natural selection) کا طریقۂ کار ہے جسے ایک ایلگورتھم (algorithm) کی صورت میں ترکیب دیا جاسکتا ہے جسے ریپلیکیٹر ڈائینیمک (replicator dynamic) کہتے ہیں [14]۔ ریپلیکیٹر ڈائینیمک کی اہم خاصیت بے ترتیبانہ طور پر تغیّرات کے عمل سے گزرتے ہوئے ریپلیکیٹرز (replicators) میں چناو کا دہراو یا اعادہ (iterations) ہے۔

یہ ڈائینیمک ایک ریاضیاتی بیان ہے جو یہ کہتا ہے کہ ایک آبادی میں ان کھلاڑیوں کا تناسب وقت کے ساتھ بڑھے گا جو بہتر تدبیریں کھیلتے ہیں۔ ایک آبادی جس میں چناو کا بنیادی طریقۂ کار ریپلیکیٹر ڈائینیمک ہو اس میں ارتقائی طور مستحکم تدابیر بطور ان تدبیروں کے سامنے آتی ہیں جن میں تغیرّات کی طرف سے پیدا کردہ انتشار کے خلاف اپنا توازن برقرار رکھنے کی اہلیت ہوتی ہے۔ اس کو دوسرے لفظوں میں اسطرح بھی بیان کیا جاتا ہے کہ ارتقائی طور مستحکم تدابیر درحقیقت ریپلیکیٹر ڈائینیمک کے ساکن نکتے (rest points) ہوتے ہیں [15]۔

مزید تجزیے پر معلوم ہوتا ہے کہ ایک ارتقائی طور مستحکم تدبیر کا تصوّر اصل میں متشاکل نیش توازنات (symmetric Nash equilibria) کے سیٹ پہ ایک باریک بینی (refinement) ہے۔ یعنی ہر ارتقائی طور مستحکم تدبیر ایک متشاکل نیش کا توازن تو ہوتی ہے لیکن ہر متشاکل نیش کا توازن ایک ارتقائی طور مستحکم تدبیر نہیں ھوتا [15]۔

IX. شاعرِ مشرق اور تدبیر و تقدیر

شاعری میں میرا علم اور شوق بہت محدود ہے لیکن تدبیر سے متعلق شاعرِ مشرق علامہ اقبال کے کچھ اشعار نظر سے گزرے۔ مثلاء مختلف جگہوں پر فرماتے ہیں کہ :

آزمودہ فتنہ ہے اک اور بھی گردوں کے پاس
سامنے تقدیر کے رسوائیٔ تدبیر دیکھ

ذرّہ ذرّہ دہر کا زندانیٔ تقدیر ہے
پردۂ مجبوری و بے چارگی تدبیر ہے

آثار تو کچھ کچھ نظر آتے ہیں کہ آخر
تدبیر کو تقدیر کے شاطر نے کیا مات

ان اشعار سے لگتا یہی ہے کہ شاید شاعرِ مشرق تقدیر کو تدبیر پر مقدّم سمجھتے تھے۔ ارتقائی طور پر مستحکم تدبیروں کی تفصیل جاننے پر یہ معلوم ہوتا ہے کہ کیسے ارتقائی عوامل خود ہی ایک اعلی اور اپنے ماحول سے زیادہ مطابق تدبیر کو وقت گزرنے کے ساتھ مستحکم کرنے میں مدد کرتے ہیں۔ اور جب یہ استحکام حاصل کر لیتی ہے تو کوئی اور چھوٹے گروپ کی طرف سے کھیلی گئی ایک مختلف تدبیر اس ارتقائی طور پر مستحکم تدبیر کے خلاف موثّر ثابت نہیں ہو سکتی۔ اس سے یہ سوال ابھرتا ہے کہ کیا وہ تدبیر جس نے اپنے آپ کو ارتقائی طور پر مستحکم کر لیا ہے وہ اقبال کے اوپر درج

شعروں کی تقدیر تو ہی نہیں؟

X. ارتقائی طور پر مستحکم تدابیر کی کوانٹم حیثیت

اتفاق سے سال 2000 کے شروع میں تدبیر کے کوانٹم نظریے پر شائع ہونے والے چند شروع کے اور اہم پرچے [7--9] میری نگاہ سے گزرے تو مجھے مارک بروم کے شیفیلڈ یونیورسٹی میں تحقیقی کام اور جون مینارڈ سمتھ کے ارتقائی طور پر مستحکم تدابیر کے ریاضیاتی تصوّر کی یاد آئی۔ میری رائے میں اگر تدبیر کا کوانٹم نظریہ تجویز کیا جا چکا ہے تو اس کا مطلب یہ ہوا کہ ارتقائی طور پر مستحکم تدابیر، جن کی ریاضیاتی بائیالوجی میں بہت اہم اور وسیع اطلاقات ہیں، کے تصور کی کوانٹم کی سمت میں توسیع ممکن ہونی چاہیے۔ میں نے مارک بروم سے ای میل پر رابطہ کیا اور ای ایس ایس کے موضع پر لکھے گئے جون مینارڈ سمتھ اور مارک بروم کے پرچے پڑھنا شروع کئے۔ اگلے دو سالوں کے دوران ڈاکٹر عبدالحمید طور صاحب کے زیر نگرانی میں نے ارتقائی طور پر مستحکم تدابیر کے تصور کی تشریح تدبیر کے نئے تجویز کردہ کوانٹم نظریے میں تلاش شروع کی اور اس موضع پر اپنا کام [16--20] قائداعظم یونیورسٹی اسلام آباد کے الیکٹرانکس ڈیپارٹمنٹ سے شائع کیا۔

مثال کے طور پر اب ہم ایک ایجنٹس (agents) یا کھلاڑیوں کی ایسی آبادی کو دیکھتے ہیں جس میں ایک ای ایس ایس نے اپنے آپ کو مستحکم کر لیا ہے۔ ہم یہ جاننا چاہتے ہیں کہ اس صورت میں کیا ہو گا کہ اگر اس آبادی میں کھلاڑیوں کا ایک ایسا چھوٹا متغیّر تدابیر کھیلنے والا گروہ نمودار ہو جائے جو کہ کوانٹم تدابیر بھی کھیل سکتا ہو۔ کیا ایسا گروہ مستحکم کلاسیکی ای ایس ایس پر حملہ آور ہو سکے گا؟ کیا اس چھوٹے گروہ کا حملہ کامیاب رہے گا اور کیا اس صورت میں ایسی ای ایس ایس اپنے آپ کو مستحکم کر لے گی جو اپنی نوعیت میں کوانٹم مکینیکی ہے؟

کوانٹم ای ایس ایس کے مستحکم ہونے کے بعد ایک اور چھوٹا گروہ نمونددار ہوتا ہے جو کہ ایک اور مختلف متغیر کوانٹم تدبیر کھیلنے کی اہلیت رکھتا ہے۔ کیا یہ گروہ اپنی کوانٹم تدبیر کو استعمال کرتے ہوئے پہلے سے مستحکم کوانٹم ای ایس ایس پر حملہ آور ہو سکے گا [16]۔

ایک ایسی آبادی کو سامنے رکھتے ہوئے جس میں جوڑا جوڑا متشاکل نوعیت کے مقابلے (symmetric pairwise contests) جاری ہوں ہم درج ذیل میں اوپر بیان کردہ سوالوں کا تجزیہ کرتے ہیں۔ اس سلسلے میں ہم قیدیوں کے دو عارظہ کی تدبیری کھیل کو دیکھتے ہیں جسے آئیزرٹ، ولکنز، اور لیوئنسٹائین کی سکیم استعمال کرتے ہوئے کوانٹم طریقے سے کھیلا گیا ہے۔

جیسا کہ اوپر ہم نے دیکھا کہ قیدیوں کے دو عارظہ کے تدبیری کھیل میں ہر قیدی کے پاس C یا D کی خالص تدبیریں ہوتی ہیں۔ ایک آبادی جس میں یہ کھیل ہر ہونے والے جوڑا جوڑا مقابلوں میں کھیلا جارہا ہو اس میں کون سی تدبیریں ارتقائی طور پر مستحکم رہیں گی؟ یہ جاننے کیلئے ہم قیدیوں کے دو عارظہ کے میٹرکس (3) اور ای ایس ایس ہونے کی مطلوبات (17) سے یہ دیکھتے ہیں کہ

$$1 = P(D, D) > P(C, D) = 0, \tag{18}$$

یعنی (17) میں ای ایس ایس کی پہلی شرط پورا ہونے پر اس آبادی میں خالص تدبیر D بطور ای ایس ایس سامنے آئے گی۔

آئیزرٹ ، ولکنز، اور لیوئنسٹائین کی سکیم میں بھی کھلاڑیوں کی ادائیگی کا میٹریکس (3) ہے لیکن کھلاڑیوں کی ادائیگیوں کی مساواتوں میں موجود امکانات (probabilities) کوانٹم میکانیکی ہیں۔ کھیل کی اس کوانٹم شکل کے ایک آبادی میں ارتقائی نتائج کو دیکھنے کیلئے ہم اس صورت حال کو دیکھتے ہیں جس میں آبادی کے ارکان کے درمیان جوڑا جوڑا مقابلے جاری ہوں اور ہر ایسے مقابلے میں قیدیوں کے دو عارظہ کا کھیل کھیلا جاتا ہو۔ خالص تدبیر D اپنے آپ کو بطور ایک ای ایس ایس مستحکم کر چکی ہو۔ اب اس آبادی میں ایک چھوٹا گروہ نموندار ہوتا ہے جو کہ کوانٹم تدبیر $\hat{U}(\theta, \phi)$ کھیلنے کی اہلیت رکھتا ہے جو کہ مساوات (11) میں بیان کی گئی ہے۔

یہ جاننے کیلئے کہ کیا کوانٹم تدبیر $\hat{U}(\theta, \phi)$ مستحکم ای ایس ایس D پر حملہ آور ہو سکے گی یا نہیں ہم مساواتوں (9)، (10)، اور (3)، (4) میں دیے گئے میٹریسیز (matrices) کی روشنی میں درج ذیل ادائیگیوں کو دیکھتے ہیں :

$$\begin{aligned}
P(D, D) &= 1, \\
P(D, \hat{U}(\theta, \phi)) &= 5\cos^2(\phi)\cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2), \\
P(\hat{U}(\theta, \phi), D) &= 5\sin^2(\phi)\cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2), \\
P(\hat{U}(\theta, \phi), \hat{U}(\theta, \phi)) &= 3\left|\cos(2\phi)\cos^2(\theta/2)\right|^2 + 5\cos^2(\theta/2)\sin^2(\theta/2)\left|\sin(\phi) - \cos(\phi)\right|^2 + \\
&\quad \left|\sin(2\phi)\cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2)\right|^2 .
\end{aligned} \tag{19}$$

ان مساواتوں کو ای ایس ایس کی تعریفی عدم مساواتوں (17) کے تناظر میں دیکھنے پر معلوم ہوتا ہے کہ اگر $\phi < \arcsin(1/\sqrt{5})$ ہو تو **اس صورت میں** $P(D, D) > P(\hat{U}(\theta, \phi), D)$ **ہو گا۔ اور اگر** $P(D, D) = P(\hat{U}(\theta, \phi), D)$ **ہو تو اس صورت میں** $P(D, \hat{U}(\theta, \phi)) > P(\hat{U}(\theta, \phi), \hat{U}(\theta, \phi))$ **ہو گا۔**

اسلئے تدبیر D **ایک ای ایس ایس کے طور پر مستحکم رہے گی جب تک** $\phi < \arcsin(1/\sqrt{5})$ **ہو ورنہ تدبیر** $\hat{U}(\theta, \phi)$ اس قابل ہو جائے گی کہ وہ مستحکم ای ایس ایس D پر حملہ آور ہو سکے۔

اس تجزیے میں حملہ آور متغیر تدبیر کھیلنے والے کھلاڑیوں کے پاس ایک زیادہ ثمر آور کوانٹم میکانیکی تدبیر ہے جس کے نتیجے میں اگر $\phi > \arcsin(1/\sqrt{5})$ ہو تو مستحکم ای ایس ایس D جو اپنی نوعیت میں کلاسیکی ہے ، پر حملہ کامیاب رہتا ہے۔

لیکن یہ مشاہدہ ہمیں ایک اور صورت حال کی طرف لے جاتا ہے کہ جس میں ایک متغیر کوانٹم تدبیر $\hat{Q} \sim \hat{U}(0, \pi/2)$ کھیلنے والا ایک چھوٹا گروہ ایک کامیاب حملہ کرتے ہوئے اپنے آپ کو بطور ایک ای ایس ایس مستحکم کر لیتی ہے۔ کیا اب ایک اور چھوٹا گروہ کوانٹم متغیر تدبیر $\hat{U}(\theta, \phi)$ کھیلتے ہوئے پہلے سے مستحکم کوانٹم ای ایس ایس $\hat{Q} \sim \hat{U}(0, \pi/2)$ پر کامیابی کے ساتھ حملہ آور ہو سکے گا؟

اس سوال کا جواب دینے کیلئے ہم یہ قاری کو یاد دلاتے ہیں کہ قیدیوں کے دو عارظہ کھیلنے کی کوانٹم سکیم میں دونوں کھلاڑیوں کی طرف سے کھیلی جانے والی کوانٹم تدبیر $\hat{Q} \sim \hat{U}(0, \pi/2)$ بطور ایک یکتا نیش کے توازن کے سامنے آتی ہے۔ اب $\hat{Q}$ کے مقابلے میں متغیّر کوانٹم تدبیر $\hat{U}(\theta, \phi)$ کھیلنے والے ایک چھوٹے گروہ کی کیا صورت حال ہو گی؟ اسکا جواب دینے کیلئے ہم درج ذیل ادائیگیاں معلوم کرتے ہیں :

$$\begin{aligned}
P(\hat{Q}, \hat{Q}) &= 3, \\
P(\hat{U}(\theta, \phi), \hat{Q}) &= [3 - 2\cos^2(\phi)] \cos^2(\theta/2), \\
P(\hat{Q}, \hat{U}(\theta, \phi)) &= [3 - 2\cos^2(\phi)] \cos^2(\theta/2) + 5\sin^2(\theta/2).
\end{aligned} \tag{20}$$

اسطرح عدم مساوات $P(\hat{Q}, \hat{Q}) > P(\hat{U}(\theta, \phi), \hat{Q})$ ان تمام $\theta \in [0, \pi]$ اور $\phi \in [0, \pi/2]$ کیلئے درست رہتی ہے سوائے اس صورت کے جب $\theta = 0$ اور $\phi = \pi/2$ ہوں اور یہ وہ صورت حال ہے جب متغیر کوانٹم تدبیر $\hat{U}(\theta, \phi)$ اور $\hat{Q}$ ایک ہو جائیں اور اسے ہم نظر انداز کر سکتے ہیں۔ اسطرح مطلوبات (17) کو سامنے رکھتے ہوئے ان کی پہلی شرط $\hat{Q}$ کے بطور ایک ای ایس ایس کے مستحکم ہونے کیلئے کافی ہے۔ مطلوبات کی دوسری شرط کے مطابق $P(\hat{Q}, \hat{Q}) = P(\hat{U}(\theta, \phi), \hat{Q})$ اور جسکا مطلب یہ ہوا کہ $\theta = 0$ اور $\phi = \pi/2$ ۔ ایک دفعہ پھر یہ وہ صورت حال ہے کہ جس میں متغیر تدبیر وہی ہے جیسے کہ $\hat{Q}$ اور اس صورت حال کو ہم نظر انداز کر سکتے ہیں۔ اور اسطرح کوانٹم تدبیر $\hat{U}(\theta, \phi)$ ایک کوانٹم ای ایس ایس $\hat{Q} \sim \hat{U}(0, \pi/2)$ پر کامیابی سے حملہ آور نہیں ہو سکتی۔

کوانٹم تدابیر اور ارتقائی استحکام کے موضوع پر کوچی یونیورسٹی آف ٹیکنالوجی (Kochi University of Technology) میں ٹاکسو چی اون (Taksu Cheon) کے ساتھ میرا لکھا ہوا کتاب کا ایک باب حوالہ [26] پر دستیاب ہے۔

XI. کوانٹم نظریۂ تدبیر پر کام کرنے والے پاکستانی نام

قائدِاعظم یونیورسٹی اسلام آباد کے الیکٹرانکس ڈیپارٹمنٹ سے پی ایچ ڈی کے دوران احمد نواز صاحب سے تعارف ہوا اور انہوں نے بھی ڈاکٹر عبدالحمید طور صاحب کے زیر نگرانی اپنی پی ایچ ڈی کیلئے کوانٹم نظریۂ تدبیر کا موضوع چنا اور اس وجہ سے ہمارے درمیان دلچسپ اور مفید گفتگو کی کئی نشستیں قائدِاعظم یونیورسٹی میں جاری رہیں۔ کوانٹم نظریۂ تدبیر پر احمد نواز صاحب کے پرچے اپنی چھپنے سے پہلے کی شکل میں حوالہ [21] پر دستیاب ہیں۔

احمد نواز صاحب آجکل اسلام آباد میں تحقیق اور ترقی کے ایک ادارے سے وابستہ ہیں۔ ان کے بعد قائدِاعظم یونیورسٹی کے طبیعات کے ڈیپارٹمنٹ سے ڈاکٹر خالد خان صاحب کے زیر نگرانی محمد رمضان صاحب اور سلمان خان صاحب نے بھی اپنی پی ایچ ڈیز کیلئے کوانٹم نظریۂ تدبیر کے موضوع کا انتخاب کیا۔ محمد رمضان صاحب بھی آجکل اسلام آباد میں ایک تحقیق اور ترقی کے ایک ادارے سے وابستہ ہیں اور ان کے پرچے اپنی چھپنے سے پہلے کی شکل میں حوالہ [22] پر دستیاب ہیں۔ سلمان خان صاحب آجکل کامسیٹس انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی اسلام آباد (Comsats Institute of Information Technology Islamabad) سے وابستہ ہیں۔ ان کے پرچے اپنی چھپنے سے پہلے کی شکل میں حوالہ [23] پر دستیاب ہیں۔

فیصل شاہ خان صاحب کا تعلق پاکستان اور امریکہ سے ہے اور انھوں نے امریکہ کی پورٹلینڈ سٹیٹ یونیورسٹی (Portland State University) سے کوانٹم نظریۂ تدبیر اور متعلقہ موضوعات پر پی ایچ ڈی کی ڈگری حاصل کی اور آجکل ابو ذھبی کی خلیفہ یونیورسٹی (Khalifa University Abu Dhabi) سے وابستہ ہیں۔ فیصل شاہ خان صاحب کے پرچے اپنی چھپنے سے پہلے کی شکل میں حوالہ [24] پر دستیاب ہیں۔ قائدِاعظم یونیورسٹی اسلام آباد سے ڈاکٹر طور صاحب کے ساتھ اور یونیورسٹی آف ایڈیلیڈ میں ساتھیوں کے ساتھ میرے پرچے اپنی چھپنے سے پہلے کی شکل میں حوالہ [25] پر موجود ہیں۔

XII. کوانٹم نظریۂ تدبیر کے کچھ جوابات کے متلاشی سوالات

تدبیر کے کوانٹم نظریہ میں کئی سوالات ایسے موجود ہیں جو اب تک جوابات کے متلاشی ہیں۔ مثال کے طور پر :
1 ۔ کیا واقعی اور کس حد تک کوانٹم تدبیروں کو کلاسیکی تدبیروں کی قابل یقین توسیع سمجھا جا سکتا ہے؟
2 ۔ کونسے حالات میں اور کن کھیلوں میں کوانٹم تدبیریں ان کھیلوں کے کلاسیکی تدبیروں والے حل کو بھی اپنے اندر سمو لیتی ہیں ؟

3۔ کیا ہم کلاسیکی کھیلوں کو کوانٹم تدبیروں سے کھیلنے کے نئے طریقے معلوم کر سکتے ہیں یا معلوم کوانٹم تدبیروں میں بہتری لا سکتے ہیں؟

4۔ غیر متحرّک اور متحرّک اقسام کے وہ کھیل (static and dynamic games) جن میں کلاسیکی تدبیروں کی تعداد محدود، گنی چنی، یا لا محدود ہوسکتی ہے، کو کوانٹم تدبیروں سے کیسے کھیلا جا سکتا ہے؟

5۔ کیا کوانٹم تدبیروں سے کھیلے گئے کھیل، امکانات کے کوانٹم نظریے (theory of quantum probability) کو بہتر طور پر سمجھنے میں کوئی مدد کر سکتے ہیں؟ اگر ہاں تو کیسے؟

6۔ کھیلوں کو کوانٹم تدبیروں سے کھیلنے کے طریقوں کے کوانٹم انفارمیشن اور کمپیوٹیشن کے میدان میں کیا اطلاقات ہو سکتے ہیں؟

XIII. حوالہ جات

[1] K. Binmore, Game Theory: A Very Short Introduction, Oxford University Press, USA (2007)

[2] E. Rasmusen, Games Information: An Introduction to Game Theory, Blackwell Publishers Ltd., Oxford, 3rd Edition (2001)

[3] M. J. Osborne, An Introduction to Game Theory, Oxford University Press, USA (2003)

[4] J. F. Nash, Non-Cooperative Games, PhD thesis, Princeton University (1950)

[5] R. Aumann, The Blackmailer Paradox: Game theory and negotiations with Arab countries (2010) . Available online at: http://www.aish.com/jw/me/97755479.htm. Accessed on 10 Dec (2018)

[6] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information, Cambridge University Press (2000)

[7] D. A. Meyer, Quantum strategies, Phys. Rev. Lett. 82 , 1052-1055 (1999)

[8] J. Eisert, M. Wilkens and M. Lewenstein, Quantum games and quantum strategies, Phy. Rev. Lett. 83 , 3077 (1999)

[9] D. A. Meyer, Quantum games and quantum algorithms, https://arxiv.org/abs/quant-ph/0004092 (2000)

[10] M. Broom, C. Cannings, and G.T. Vickers, Choosing a nest site: Contests and catalysts, American Naturalist 147/6 , 1108-1114 (1996)
[11] J. Maynard Smith, Evolution and the Theory of Games , Cambridge University Press , ISBN 0-521-28884-3 (1982)
[12] R. A. Fisher, The Genetical Theory of Natural Selection, Clarendon Press, Oxford (1930)
[13] J. W. Weibull, Evolutionary Game Theory, The MIT Press, Cambridge (1995)
[14] J. Hofbauer and K. Sigmund, Evolutionary Games and Population Dynamics , Cambridge University Press (1998)
[15] R. Cressman, The Stability Concept of Evolutionary Game Theory , Springer Verlag, Berlin (1992)
[16] A. Iqbal and A. H. Toor, Evolutionarily stable strategies in quantum games, Physics Letters A 280/5-6 , 249-256 (2001)
[17] A. Iqbal and A. H. Toor, Entanglement and dynamic stability of Nash equilibria in a symmetric quantum game, Physics Letters A 286/4 , -245 250 (2001)
[18] A. Iqbal and A. H. Toor, Quantum mechanics gives stability to a Nash equilibrium, Physical Review A 65 , 022306 (2002)
[19] A. Iqbal and A. H. Toor, Darwinism in quantum systems? Physics Letters A 294/5-6 , 261-270 (2002)
[20] Iqbal and A. H. Toor, Stability of mixed Nash equilibria in symmetric quantum games, Communications in Theoretical Physics 42/3 , 335-338 (2004)
[21] Preprints of Ahmad Nawaz's publications on quantum games are available at this link: https://arxiv.org/search/quant-ph?searchtype=authorquery=Nawaz
[22] Preprints of Mohammad Ramzan's publications on quantum games are available at this link: https://arxiv.org/search/quant-ph?searchtype=authorquery=Ramzan
[23] Preprints of Salman Khan's publications on quantum games

are available at this link: https://arxiv.org/search/quant-ph?searchtype=authorquery=Khan

[24] Preprints of Faisal Shah Khan's publications on quantum games are available at this link: https://arxiv.org/search/quant-ph?searchtype=authorquery=Khan

[25] Preprints of Azhar Iqbal's publications on quantum games are available at this link: https://arxiv.org/search/quant-ph?searchtype=authorquery=Iqbal

[26] A. Iqbal and T. Cheon, Evolutionary stability in quantum games, Chapter 13 in Quantum Aspects of Life, edited by D. Abbott, P.C.W. Davies and A. K. Pati, foreword by Sir Roger Penrose, ISBN 978-1-84816-267-9 , Imperial College Press, preprint: https://arxiv.org/abs/0706.1413 (2008)

XIV. مصنّفین کا تعارف

اظہر اقبال نے 1991 میں گورنمنٹ کالج لاہور پاکستان (جو اب گورنمنٹ کالج یونیورسٹی ہے) سے طبیعیات اور ریاضی میں بی ایس سی کی سند حاصل کی اور 1995 میں گورنمنٹ آف پاکستان کے سکالرشپ پر یونیورسٹی آف شیفیلڈ برطانیہ (University of Sheffield, UK) سے طبیعیات میں بی ایس سی (آنرز) کی ڈگری حاصل کی۔ وطن واپسی پر اس نے پاکستان انسٹی ٹیوٹ آف لیزرز اینڈ آپٹکس اسلام آباد پاکستان (Pakistan Institute of Lasers and Optics, Islamabad, Pakistan) میں فوٹونکس (photonics) کے میدان میں سال 2002 تک کام کیا۔ سال 2006 میں یونیورسٹی آف ھل مشرقی یارک شائر برطانیہ (University of Hull, East Yorkshire, UK) سے اطلاقی ریاضیات (Applied Mathematics) میں پی ایچ ڈی کی ڈگری حاصل کرنے کے بعد اس نے نیشنل یونیورسٹی آف سائنسز اور ٹیکنالوجی (NUST) اسلام آباد پاکستان میں تدریس کی۔ 2006-2007 کے دوران جاپان سوسائٹی آف پروموشن آف سائنس (JSPS) کی طرف سے ایک پوسٹ ڈاکٹرل فیلوشپ (postdoctoral fellowship) حاصل کرنے کے بعد اس نے کوچی یونیورسٹی آف ٹیکنالوجی (Kochi University of Technology) جنوبی جاپان میں تحقیق کا کام کیا۔ 2007-2011 کے دوران اس نے آسٹریلوی ریسرچ کونسل (Australian Research Council) یا ARC کی طرف سے دی گئی ایک پوسٹ ڈاکٹرل فیلوشپ پر یونیورسٹی آف ایڈیلیڈ (University of Adelaide) جنوبی آسٹریلیا میں تحقیق کا کام کیا۔ 2012 کے سال کے دوران اظہر نے یونیورسٹی آف ایڈیلیڈ میں ARC

کے فنڈز پر بطور سینئر ریسرچ ایسوسی ایٹ (Senior Research Associate) کام کیا۔ 2013 کے آغاز سے اس نے سعودی عرب کی شاہ فہد یونیورسٹی آف پٹرولیم اور منرلز دھران (King Fahd University of Petroleum and Minerals, Dhahran, Saudi Arabia) کے ریاضیات اور شماریات کے ڈیپارٹمنٹ (Department of Mathematics & Statistics) میں تدریس کی۔ 2014 کے وسط سے وہ شاہ فہد یونیورسٹی آف پٹرولیم اور منرلز سے یونیورسٹی آف ایڈیلیلڈ واپس آگئے جہاں وہ تحقیق اور تدریس سے وابستہ ہیں۔ انکی نظریاتی طبعیات اور اطلاقی ریاضی میں تحقیق کا قابل ذکر حصہ کوانٹم گیم تھیوری یا تدبیر کے کوانٹم نظریے پر ہے اور انہیں بین الکلیاتی تحقیق (interdisciplinary research) سے بھی دلچسپی ہے۔

ڈیرک ایبٹ نےبی ایس سی آنرز کی ڈگری یونیورسٹی آف لوفبورہ برطانیہ (University of Loughborough, UK) سے اور پی ایچ ڈی کی ڈگری یونیورسٹی آف ایڈیلیڈ آسٹریلیا سے الیکٹریکل اور الیکٹرانک انجینیئر نگ میں حاصل کی۔ 1978-1986 کے دوران وہ جی ای سی ہرسٹ ریسرچ سنٹر لنڈن (GEC Hirst Research Centre, London) میں ایک ریسرچ انجینیئر (Research Engineer) رہے۔ 1986-1987 کے دوران وہ آسٹک مائیکرو سسٹمز آسٹریلیا (Austek Microsystems, Australia) میں وی ایل ایس آئی ڈیزائن انجینیئر (VLSI Design Engineer) تھے۔ وہ 1987 سے یونیورسٹی آف ایڈیلیڈ آسٹریلیا سے وابستہ ہیں جہاں وہ آجکل سکول آف الیکٹریکل اور الیکٹرانک انجینیئر نگ میں فل پروفیسر (Full Professor) ہیں۔ ان کے نام 1000 سے زیادہ تحقیقی پرچے یا اسناد حق ایجاد (patents) ہیں۔ انہیں طبیعیات کے متعدد مضامین کے ساتھ ساتھ الیکٹرانک انجینیئر نگ کی پیچیدہ نظامات (complex systems) میں اطلاقات سے تحقیقی دلچسپی ہے ۔ وہ انسٹیٹیوٹ آف فزکس برطانیہ (Institute of Physics, UK) کے فیلو (Fellow) ہیں اور انہوں نے متعدّد ایوارڈز حاصل کئے ہیں جن میں سال 2004 کا جنوبی آسٹریلیا کا ٹال پوپی ایوارڈ (South Australian Tall Poppy Award for Science) ، سال 2004 کا جنوبی آسٹریلیا میں سائینس اور ٹیکنالوجی کیلئے غیر معمولی خدمات سر انجام دینے پر وزیر اعلی کی طرف سے عظیم ایوارڈ (Premier's SA Great Award in Science and Technology for outstanding contributions to South Australia) ، سال 2012 میں آسٹریلوی ریسرچ کونسل کی طرف سے دی گئی فیوچر فیلوشپ (Australian Research Council Future Fellowship) ، سال 2015 کا ڈیوڈ ڈیوہرسٹ میڈل (David Dewhurst Medal) , سال 2018 کا بیری انگلس میڈل (Barry Inglis Medal) ، اور سال 2019 کا ایم اے سارجنٹ میڈل (M. A. Sargent Medal) شامل ہیں۔ اس کے علاوہ وہ متعدد تحقیقی جرائد کے مدیر یا میزبان مدیر ہیں اور آجکل تحقیقی جرائد IEEE Access ، Frontiers in Physics ، Royal Society Open

Science اور Nature's Scientific Reports کے اداریاتی بورڈز کے رکن ہیں۔